Robert Hofstetter

PHILOSOPHISCHE GRUNDLAGEN VON MATHEMATIK UND LOGIK.

BEMERKUNGEN ZU WITTGENSTEINS TRAKTAT

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Traktat zu interpretieren. Für die einen ist er ein ethisch - metaphysisches Werk, für die anderen ist er ein Buch über Logik. Ich glaube, daß diese Sichtweisen einander nicht ausschließen, sondern ergänzen sollten. Meine Arbeit beschäftigt sich naturgemäß vorwiegend mit den logischen Aspekten des Tractatus.

Wittgensteins Überlegungen knüpfen unmittelbar an jene Gedanken an, die in den Principia Mathematica zum Ausdruck gebracht wurden. Russell war bei dem Versuch, die Mathematik logisch zu begründen, auf eine Antinomie gestoßen. Um zu verstehen, worum es geht, ist es nötig, vorerst einige Definitionen aufzustellen.

Def. 1: Eine Menge heißt dann und nur dann normal, wenn sie sich selbst nicht als Element enthält.
Ein Beispiel wäre die Menge der Mathematiker. Die Menge selbst ist kein Mathematiker und daher auch nicht Element ihrer selbst.

Def. 2: Eine Menge heißt dann und nur dann nicht - normal, wenn sie sich selbst als Element enthält.
Als Beispiel könnte die Menge aller denkbaren Dinge dienen. Die Menge aller denkbaren Dinge ist selbst denkbar und daher Element ihrer selbst.

Def. 3: " N " sei die Menge aller normalen Mengen.
Es stellt sich nun die Frage: Ist N selbst normal oder nicht - normal?

Nehmen wir an, daß die Menge N normal ist. Dann ist sie Element ihrer selbst. Denn N enthält laut Def. 3 alle Normalmengen. Aber in diesem Fall ist N nicht - normal, weil eine Menge, die sich selbst als Element enthält, nach Def. 2 nicht - normal ist.

Wenn N dagegen nicht - normal ist, enthält sie sich selbst als Element. Es käme also unter den Elementen von N eine anomale Menge vor (nämlich sie selbst). Dies widerspricht aber der Def. von N, denn danach darf N nur Normalmengen enthalten.

Um illegitime Gesamtheiten zu vermeiden, führte Russell das Zirkelfehlerprinzip ein. Danach kann keine Totalität Glieder enthalten, die nur in Termini dieser Totalität definierbar sind, oder Glieder, die diese Totalität umfassen oder voraussetzen.

Die Lösung gelang mit Hilfe der Typentheorie, bei der alle Gegenstände und Mengen hierarchisch geordnet werden: auf der untersten Stufe finden wir nur Individuen, auf der 2. Stufe Mengen von Individuen, auf der 3. Stufe Mengen der 2. Stufe usw. Eine Menge kann prinzipiell nur Mengen niedrigerer Stufen als Elemente enthalten. Der Begriff einer anomalen Menge kann nicht mehr gebildet werden. Daher verschwindet innerhalb der Typentheorie die Russellsche Antinomie.

Abkürzungen und Symbole

Junktoren } logische Konstanten
Quantoren }

Konjunktion: logisches Produkt
Disjunktion: logische Summe

$\sim$	" nicht "	$\supset$	" wenn ...,dann ... "
$.$	" und "	$\equiv$	" dann und nur dann, wenn "
$p \mid q$	" weder p noch q "		

Gebrauch von Punkten: Punkte unmittelbar nach und vor Zeichen wie " v ", "$\supset$", "$\equiv$" dienen dazu, eine Proposition wie durch Klammern abzutrennen; sonst vorkommende Punkte dienen als Zeichen eines logischen Produkts. Der allgemeine Grundsatz ist, daß eine größere Zahl von Punkten eine äußere Klammer anzeigt, eine kleinere Anzahl aber eine innere Klammer. Der Bereich einer durch eine Punktgruppe angedeuteten Klammer reicht rückwärts und vorwärts über jede kleinere Zahl von Punkten bis wir entweder an das Ende der behaupteten Proposition gelangen oder zu einer größeren Anzahl von Punkten.

$$p \vee q . \supset . q \vee p \quad \longleftrightarrow \quad (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$$

$$p : \vee : q . \supset . q \vee p \quad \longleftrightarrow \quad p \vee [q \rightarrow (q \vee p)]$$

$(\exists x)$ " es gibt mindestens ein x "
(x) " für alle x "

$$(x) : \varphi x . \supset . \psi x \qquad \text{formale Implikation}$$

$$(x) : \varphi x . \equiv . \psi x \qquad \text{formale Äquivalenz}$$

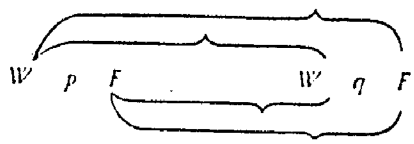
4.31 Die Wahrheitsmöglichkeiten können wir durch Schemata folgender Art darstellen (»W« bedeutet »wahr«, »F« »falsch«. Die Reihen der »W« und »F« unter der Reihe der Elementarsätze bedeuten in leichtverständlicher Symbolik deren Wahrheitsmöglichkeiten):

p	q	r
W	W	W
F	W	W
W	F	W
W	W	F
F	F	W
F	W	F
W	F	F
F	F	F

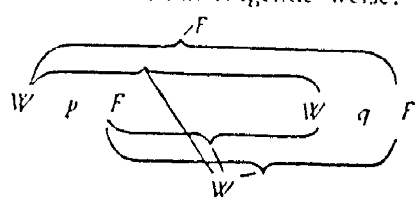
p	q
W	W
F	W
W	F
F	F

p
W
F

6.1203 Um eine Tautologie als solche zu erkennen, kann man sich, in den Fällen, in welchen in der Tautologie keine Allgemeinheitsbezeichnung vorkommt, folgender anschaulichen Methode bedienen: Ich schreibe statt »p«, »q«, »r« etc. »WpF«, »WqF«, »WrF« etc. Die Wahrheitskombination drücke ich durch Klammern aus. Z. B.:



und die Zuordnung der Wahr- oder Falschheit des ganzen Satzes und der Wahrheitskombinationen der Wahrheitsargumente durch Striche auf folgende Weise:



p	q	$\bar{\wedge}$		$\rightarrow$		$\vee$				$\leftrightarrow$			$\bar{\vee}$			$\wedge$	
W	W	W	F	W	W	W	F	F	F	W	W	W	F	F	F	W	F
W	F	W	W	F	W	W	F	W	W	F	F	W	F	F	W	F	F
F	W	W	W	W	F	W	W	F	W	F	W	F	F	W	F	F	F
F	F	W	W	W	W	F	W	W	F	W	F	F	W	F	F	F	F
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

2 Wahrheitswerte, 1 Variable:
$2^{2^1} = 4$ Möglichkeiten

2 Wahrheitswerte, 2 Variablen:
$2^{2^2} = 16$ Möglichkeiten

2 Wahrheitswerte, 3 Variablen:
$2^{2^3} = 256$ Möglichkeiten

5.101 Die Wahrheitsfunktionen jeder Anzahl von Elementarsätzen lassen sich in einem Schema folgender Art hinschreiben:

(W W W W) (p, q) Tautologie (Wenn p, so p; und wenn q, so q.) ($p \supset p \,.\, q \supset q$)
(F W W W) (p, q) in Worten: Nicht beides p und q. ($\sim (p \,.\, q)$)
(W F W W) (p, q) „ „ Wenn q, so p. ($q \supset p$)
(W W F W) (p, q) „ „ Wenn p, so q. ($p \supset q$)
(W W W F) (p, q) „ „ p oder q. ($p \vee q$)
(F F W W) (p, q) „ „ Nicht q. ($\sim q$)
(F W F W) (p, q) „ „ Nicht p. ($\sim p$)
(F W W F) (p, q) „ „ p, oder q, aber nicht beide. ($p \,.\, \sim q : \vee : q \,.\, \sim p$)
(W F F W) (p, q) „ „ Wenn p, so q; und wenn q, so p. ($p \equiv q$)
(W F W F) (p, q) „ „ p
(W W F F) (p, q) „ „ q
(F F F W) (p, q) „ „ Weder p noch q. ($\sim p \,.\, \sim q$) oder ($p \mid q$)
(F F W F) (p, q) „ „ p und nicht q. ($p \,.\, \sim q$)
(F W F F) (p, q) „ „ q und nicht p. ($q \,.\, \sim p$)
(W F F F) (p, q) „ „ q und p. ($q \,.\, p$)
(F F F F) (p, q) Kontradiktion (p und nicht p; und q und nicht q.) ($p \,.\, \sim p \,.\, q \,.\, \sim q$)

Disjunktive Normalform

p	q	$p \to q$	
W	W	W	$p \wedge q$
W	F	F	—
F	W	W	$\neg p \wedge q$
F	F	W	$\neg p \wedge \neg q$

Konstituenten

Disjunktive Normalform: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Wir bilden die disjunktive Normalform in folgender Weise:

1) Ist der Wahrheitswert des Ergebnisses wahr, so wird eine Konstituente gebildet; ist der Wahrheitswert falsch, so wird keine Konstituente gebildet.

2) Ist eine Variable mit W belegt, so wird sie nicht negiert; ist sie mit F belegt, so wird sie negiert. die Variablen werden innerhalb der Konstituenten konjunktiv verknüpft.

3) Die so gebildeten Konstituenten werden disjunktiv mitein= ander verbunden.

Machen wir die Probe, indem wir für die disjunktive Normalform die Wahrheitstabelle aufstellen:

p	q	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
W	W	W	W	F	F	W	W	F	F	F
W	F	F	F	F	F	F	F	F	F	W
F	W	F	W	W	W	W	W	W	F	F
F	F	F	F	W	F	F	W	W	W	W

Das Ergebnis zeigt also dieselbe Wahrheitsverteilung wie $(p \to q)$.

Überlegen wir uns, wieso die disjunktive Normalform eine bestimmte Aussageform richtig wiedergibt! Jeder Konstituent ist nur in einer Zeile wahr, in allen anderen Zeilen falsch. In dieser Zeile tritt als Ergebnis in der Wahrheitstabelle der Wert W auf. Es genügt ja, daß ein Glied der Disjunktionsreihe den Wert W hat, damit die ganze Aussageform den Wert W annimmt. In jener Zeile, wo als Ergebnis der Wert F auftritt, kommt dagegen allen Konstituenten der Wert F zu.

Bevor wir aus dem Gesagten allgemeine Schlußfolgerungen ziehen, wollen wir noch die Bildung der disjunktiven Normalform anhand eines Beispiels mit 3 Aussagevariablen üben:

p	q	r	(p → q)	→	(q → r)	
W	W	W	W	W	W	$p \wedge q \wedge r$
W	W	F	W	F	F	
W	F	W	F	W	W	$p \wedge \neg q \wedge r$
W	F	F	F	W	W	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
F	W	W	W	W	W	$\neg p \wedge q \wedge r$
F	W	F	W	F	F	
F	F	W	W	W	W	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
F	F	F	W	W	W	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Disjunktive Normalform:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$$
$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Wir haben gesehen, daß wir in der disjunktiven Normalform mit Hilfe von Negation, Konjunktion und Disjunktion alle anderen Wahrheitsfunktionen ausdrücken können. Gelingt es uns zu zeigen daß wir mit $\bar{\wedge}$ bzw. mit $\bar{\vee}$ sowohl $\neg$, $\wedge$ als auch v ausdrücken können, so ist der Beweis erbracht, daß $\bar{\wedge}$ bzw. $\bar{\vee}$ allein fähig sind, alle anderen Wahrheitsfunktionen auszudrücken.

<u>Exklusion</u> (Unverträglichkeit)

$\bar{\wedge}$ " p und q sind nicht beide wahr "

Die Exklusion ist dann und nur dann falsch, wenn beide Aus=sagen wahr sind.

p	q	$p \bar{\wedge} q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

<u>Rejektion</u>

$\bar{\vee}$ " weder p noch q "

Die Rejektion ist dann und nur dann wahr, wenn beide Aussagen falsch sind.

p	q	$p \bar{\vee} q$
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W

$$p \bar{\wedge} q \longleftrightarrow \neg (p \wedge q)$$
$$p \bar{\vee} q \longleftrightarrow \neg (p \vee q)$$

$\bar{\wedge}$ symbolisiert das negierte $\wedge$, $\bar{\vee}$ das negierte $\vee$.

$$\neg p \longleftrightarrow p \bar{\wedge} p$$
$$p \vee q \longleftrightarrow (p \bar{\wedge} p) \bar{\wedge} (q \bar{\wedge} q)$$
$$p \wedge q \longleftrightarrow (p \bar{\wedge} q) \bar{\wedge} (p \bar{\wedge} q)$$

$$\neg p \longleftrightarrow p \bar{\vee} p$$
$$p \vee q \longleftrightarrow (p \bar{\vee} q) \bar{\vee} (p \bar{\vee} q)$$
$$p \wedge q \longleftrightarrow (p \bar{\vee} p) \bar{\vee} (q \bar{\vee} q)$$

Die allgemeine Form des Satzes

6 Die allgemeine Form der Wahrheitsfunktion ist:
$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$
Dies ist die allgemeine Form des Satzes.

5.5 Jede Wahrheitsfunktion ist ein Resultat der successiven Anwendung der Operation (- - - W) (ξ , ...) auf Elementarsätze.

$\bar{p}$	steht für alle Elementarsätze
$(\xi, \ldots)$	steht für eine beliebige Menge von Sätzen
$(\bar{\xi})$	Abkürzung

Der Strich über der Variablen deutet an, daß sie ihre sämtlichen Werte in der Klammer vertritt.

p	q	p | q
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Operation (- - - W)

$$p \mid q \longleftrightarrow p \bar{\vee} q \longleftrightarrow \neg(p \vee q) \xleftrightarrow{\text{de Morgan}} \neg p \wedge \neg q$$

$$N(\bar{\xi}) \longleftrightarrow \text{Operation}\ (- - - W)(\xi, \ldots)$$

Sämtliche Sätze werden negiert und durch Konjunktion miteinander verbunden.

ξ hat einen Wert: $N(\bar{\xi}) \longleftrightarrow \neg p$

ξ hat 2 Werte: $N(\bar{\xi}) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

ξ hat 3 Werte: $N(\bar{\xi}) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

p	q	r	¬ p	∧	¬ q	∧	¬ r
W	W	W	F	F	F	F	F
W	W	F	F	F	F	F	W
W	F	W	F	F	W	F	F
W	F	F	F	F	W	F	W
F	W	W	W	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F	F	W
F	F	W	W	W	W	F	F
F	F	F	W	W	W	W	W

Assoziativgesetz der Konjunktion:

$$(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Es soll nun gezeigt werden, wie jede der 16 Wahrheitsfunktionen durch wiederholte Anwendung der Operation N auf die Elementar=sätze gewonnen werden kann.

$$7 = N(10) \qquad 10 \mathrel{\hat{=}} q$$
$$6 = N(11) \qquad 11 \mathrel{\hat{=}} p$$
$$12 = N(10, 11)$$
$$5 = N(12)$$
$$15 = N(6, 7)$$
$$2 = N(15)$$
$$16 = N(2, 15)$$
$$1 = N(16)$$
$$8 = N(12, 15)$$
$$9 = N(8)$$
$$13 = N(9, 11, 12)$$
$$4 = N(13)$$
$$14 = N(9, 10)$$
$$3 = N(14)$$

$$15 = N(N(11), N(10))$$

$$2 = NN(N(11), N(10))$$

$$16 = N(NN(N(11), N(10)), N(N(11), N(10)))$$

Interpretation

Junktoren und Quantoren sind durch einander definierbar. Sie fügen einem zusammengesetzten Satz nichts hinzu, was nicht bereits in den Elementarsätzen enthalten ist. Wittgenstein be=zeichnet es daher in Satz 4.0312 als seinen Grundgedanken, daß die " logischen Konstanten nicht vertreten ".

Ihm schwebt eine Idealsprache vor, in der verschiedene Gegenstände durch verschiedene Zeichen ausgedrückt werden, um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Folgerichtig hält er das Identitäts=zeichen für entbehrlich. " Gleichheit des Gegenstandes drücke ich durch Gleichheit des Zeichens aus, und nicht mit Hilfe des Gleichheitszeichens. Verschiedenheit der Gegenstände durch Ver=schiedenheit der Zeichen." (5.53) Als Kommentar dazu erfahren wir in Satz 5.5303: " Beiläufig gesprochen: von zwei Dingen zu sagen, sie seien identisch, ist ein Unsinn, und von Einem zu sagen, es sei identisch mit sich selbst, sagt gar nichts."

Wittgenstein interpretiert die logischen Sätze als Tauto=logien (6.1). Betrachten wir etwa den Satz " Es regnet oder es regnet nicht ". Er sagt nichts über das Wetter aus. Die Tautologie stellt keinen Sachverhalt dar. Sie ist wahr - egal, ob es regnet oder nicht regnet. Wir müssen uns davon gar nicht erst durch eine Beobachtung vergewissern. Ebenso verhält es sich mit der Kontra=diktion. Verdeutlichen wir uns ihre Eigenschaften anhand des Bei=spiels " Es regnet und es regnet nicht ". Die Kontradiktion ist unter keiner Bedingung wahr. Von daher ist auch Satz 4.464 ver=ständlich: " Die Wahrheit der Tautologie ist gewiß, des Satzes möglich, der Kontradiktion unmöglich." Satz ist eigentlich immer die empirische Aussage, ist etwas, das die Wirklichkeit beschreibt. Tautologie und Kontradiktion stellen streggenommen keine Sätze dar, es handelt sich bei ihnen um Scheinsätze.

Die Traktat - Thesen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Sprache der Abbildung von Sachverhalten dient. Aus diesem Grund lehnt Wittgenstein das Konzept der semantischen Stufen ab.

Eine Metasprache würde nicht die Welt abbilden, sondern die logische Struktur der Abbildung. Der logischen Struktur entspricht kein Gegenstand, der expliziert werden könnte. Sprache ist im wesentlichen immer Objektsprache. Abgesehen davon führt die Hierarchie der Metasprachen zu einem unendlichen Regreß. Die letzte Stufe bliebe unbestimmt.

Russell konnte die Folge der natürlichen Zahlen nur unter der Annahme bilden, daß es in der Welt unendlich viele Gegenstände gibt. Er mußte somit ein außerlogisches Prinzip zu Hilfe nehmen, um die Arithmetik aus der Logik abzuleiten. Im Gegensatz dazu vertritt Wittgenstein den Standpunkt, daß " die Logik für sich selber sorgen muß " (5.473).

Seine grundsätzliche Position kommt in Satz 6.13 zum Ausdruck: " Die Logik ist keine Lehre, sondern ein Spiegelbild der Welt. Die Logik ist transcendental. " Der Ausdruck " trans= cendental " bezeichnet in der Kantschen Philosophie das, was der Erfahrung zugrunde liegt. Die Logik spielt bei Wittgenstein offen= sichtlich die gleiche Rolle wie die Aprioris Raum, Zeit, Kausa= lität. Sie ermöglicht Erfahrung, stammt aber selbst nicht aus der Erfahrung.

Damit ein Satz die Realität darstellen kann, muß er etwas mit der Realität gemein haben. Er muß die gleiche <u>logische Form</u> besitzen. Die logische Form spiegelt sich in der Sprache. Was sich in der Sprache spiegelt, kann nicht gesagt werden. Es <u>zeigt</u> sich. Die Typentheorie versucht darüber zu reden, wovon nicht gesprochen werden kann. Daß etwas einem bestimmten Typus angehört, zählt zu dem, was sich nicht sagen läßt.

Die Mathematik wird in enger Analogie zur Logik gesehen. Auch hier folgt Wittgenstein Bertrand Russell. " Die Mathematik ist eine logische Methode. Die Sätze der Mathematik sind Gleichungen also Scheinsätze. " (6.2) Sätze haben die Funktion, Sachverhalte darzustellen. Da die mathematischen Sätze keinen Sachverhalt dar= stellen, kommt ihnen auch nicht der Charakter von Sätzen zu.

Von hier führt eine geistige Brücke zu 6.21: " Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus. " Um diesen Satz richtig zu interpretieren,müssen wir zunächst wissen, was Wittgenstein unter " Gedanke " versteht. Der Gedanke ist das psychische Korrelat des Satzes oder besser des Satzzeichens. Da die mathem. Gleichungen aber keine Sätze sind, können sie folglich auch keinen Gedanken zum Ausdruck bringen.

Warum ist es dann überhaupt möglich, die Mathematik im Rahmen der Naturwissenschaften erfolgreich einzusetzen? Hier= über gibt Satz 6.211 Auskunft: " Im Leben ist es ja nie der mathem. Satz, den wir brauchen, sondern wir benützen den mathematischen Satz <u>nur</u>, um aus Sätzen, welche nicht der Mathematik angehören, auf andere zu schließen, welche gleichfalls nicht der Mathematik angehören." Die Mathematik garantiert die Sicherheit von Ableitungs= verhältnissen. Sie zeigt etwa: Wenn das Gravitationsgesetz stimmt, muß zwagsläufig auch das 1. Keplersche Gesetz stimmen. Sollten die Planeten von der Ellipsenbahn abweichen, so bedeutet das nicht, die Mathematik ist falsch, sondern eine falsche empirische Vor= aussetzung hat sich eingeschlichen.

Nach Wittgenstein sollte der Begriff der Notwendigkeit für die Logik reserviert werden. Aus den beiden Sätzen " Einstein ist ein Mensch " und " Alle Menschen sind sterblich " folgt <u>not= wendigerweise</u> der Satz " Einstein ist sterblich ".

Dagegen bezeichnet Wittgenstein den Glauben an den Zu= sammenhang von Ursache und Wirkung als einen " Aberglauben ". (5.1361) Ein Kausalsatz stützt sich auf vergangene Beobachtungen. Es gibt keine Garantie, daß künftige Beobachtungen zu den gleichen Resultaten wie die vergangenen Beobachtungen führen. Daher stellt Wittgenstein fest: " Einen Zwang, nach dem Eines geschehen müßte, weil etwas anderes geschehen ist, gibt es nicht. Es gibt nur eine <u>logische</u> Notwendigkeit." (6.37)

Literatur:

Russell, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie, Wiesbaden

Wittgenstein, Ludwig: Tractatus logico - philosophicus, Schriften 1, Frankfurt 1989

Wittgenstein, Ludwig: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Schriften 6, Frankfurt 1989

Whitehead, Alfred North und Russell, Bertrand: Principia Mathematica, Frankfurt 1989